1. Schulaufgabe aus der Mathematik F/B13 **03.12.2020**

75 min; Hilfsmittel: TR, Merkhilfe

Analysis:

1.0 Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion $f(x) = \frac{x(x^2-1)}{x^2-4}$.

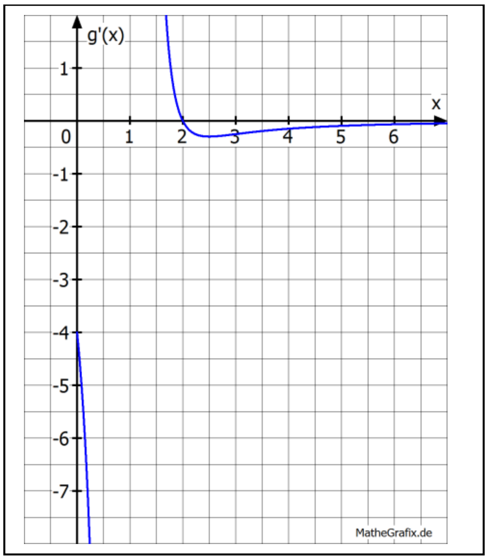
1.1 Geben Sie den Definitionsbereich sowie die Art der Definitionslücken von f an. **2**

1.2 Bestimmen Sie die Nullstellen mit Vielfachheit sowie die Gleichungen aller Asymptoten von f. **4**

1.3 Ermitteln Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von f und geben Sie Art und Lage der Extremstellen (nur x-Werte) an. (Zwischenergebnis: $f'(x) = \frac{x^4-11x^2+4}{(x^2-4)^2}$) **7**

1.4 Machen Sie anhand bisheriger Ergebnisse begründete Aussagen zum Krümmungsverhalten von f und geben Sie die ungefähre Lage der Wendestellen an. **3**

2.0 Gegeben ist der Graph der Ableitungsfunktion g' im Bereich $x \in [0; 7[$. Begründen Sie jeweils, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. **6**



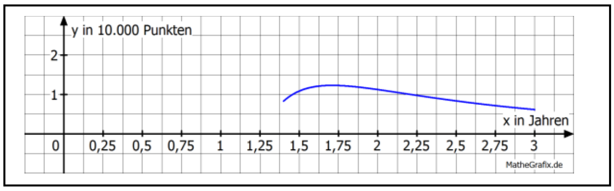
2.1 $g(x)$ ist im ganzen Intervall $]-\infty; 2]$ monoton fallend.

2.2 Der Graph von g besitzt für $x > 0$ genau einen Tiefpunkt.

2.3 $g'(2) = 0$.

2.4 Der Wendepunkt von g liegt zwischen $x = 2$ und $x = 3$.

3.0 Der folgende Graph gibt schematisch den Verlauf des Kurses eines Aktienindex (in 10.000 Punkten) seit dem 01.06.2020 (in Jahren) an. $t = 0$ entspricht im Koordinatensystem dem 01.01.2019. (Hinweis: Der Verlauf vom 01.01.2019 – 30.05.2020 ist hier nicht abgebildet).



3.1 Zu welchem Zeitpunkt hat der Index seinen höchsten Stand im betrachteten Zeitintervall erreicht? **1**

3.2 Angenommen der Verlauf des Indexkurses lässt sich durch die Funktion $i(x) = 3(\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^5})$ beschreiben. Wie hoch wäre nach diesem Modell der Kurs des Index auf lange Sicht? **1**

3.3 Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass es im sichtbaren Zeitintervall einen Zeitpunkt gibt, zu dem der Kurs am stärksten sinkt. **2**

Bitte wenden!

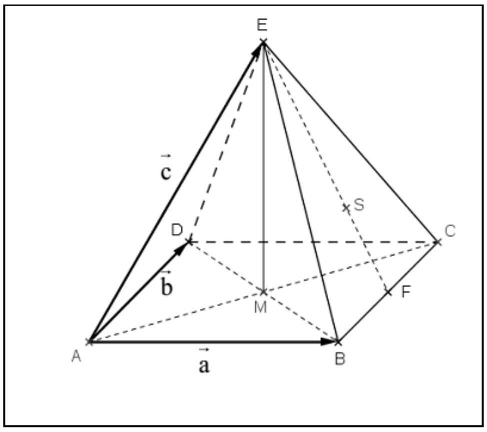
1. Schulaufgabe aus der Mathematik F/B13 **03.12.2020**

75 min; Hilfsmittel: TR, Merkhilfe

Lineare Algebra:

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass die drei Vektoren eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden. **4**

2.0 Gegeben ist eine gleichseitige Pyramide mit rechteckiger Grundfläche. Der Punkt S ist der Schwerpunkt des Dreiecks BCE.



2.1.0 Geben Sie folgende Vektoren nur mit Hilfe der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ an.

2.1.1 $\overrightarrow{EC}$ **1**

2.1.2. $\overrightarrow{DF}$ **1**

2.2. In welchem Verhältnis teilt S die Strecke $\overline{FE}$? **1**

2.3.0 Gegeben sind nun die Punkte $A(6|1|0), B(6|4|0), C(2|4|0), D(2|1|0), E(4|2{,}5|4)$ der Pyramide.

2.3.1 Zeigen Sie ,dass es sich bei der Grundfläche ABCD um ein Rechteck, aber kein Quadrat handelt. **3**

2.3.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes M sowie das Volumen der Pyramide. **4**
(*Zwischenergebnis*: M(4|2,5|0))

1.1 $D = \mathbb{R}\{-2; 2\};$ $Polstellen\ mit\ VZW$ **2**

1.2 $x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 1\ (einf.);$ $x = 2;\ x = -2\ (sAs);$ $y = x\ (wAs)$ **4**

$(x^3 - x):(x^2 - 4) = x + \frac{3x}{x^2-4}$

$-−(x^3 - 4x).$

3x

1.3 $f'(x) = \frac{(3x^2-1)(x^2-4)-(x^3-x)2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4-11x^2+4}{(x^2-4)^2}$ **7**

$x^4 - 11x^2 + 4 = 0;\ (x^2 = z) \Longrightarrow mit\ Substit.: z_1 = 10{,}62; z_2 = 0{,}38 \Longrightarrow$

$x_1 = -3{,}26; x_2 = 3{,}26; x_3 = -0{,}62; x_4 = 0{,}62$

x	<	-3,26	<	-2	<	-0,62	<	0,62	<	2	<	3,26	<
V	+	0	-	Nd	-	0	+	0	-	Nd	-	0	+
G	Sms	HOP	Smf		Smf	TIP	Sms	HOP	Smf		Smf	TIP	sms

1.4 Links von x = -2 ist der Graph rechtsgekr, da er eine schiefe Asy, einen HOP bei x=-3,26 hat und von -∞ kommt. Links der sAs ist er linksgekr., bevor er bei x = 0 in eine Rechtskrümmung übergeht (zwischen HOP und TIP). Rechts der sAs x = 2 ist er wieder rechtsgekr., da er sich nach ∞ verschwindet. **3**

2.1 $falsch$: $g(x)$ ist für x = 1 nicht definiert **1**

2.2 Falsch: Der Graph von g besitzt für $x > 0$ genau einen HOP. **1**

2.3 $richtig,\ g'(2) = 0$ .siehe Skizze, Nullstelle. **1**

2.4 Richtig, da g‘(x) dort einen Extrempunkt besitzt. **1**

3.1 Bei ca. x = 1,65, also Ende August 2020. **1**

3.2 langfristig gegen 0, da $\lim\limits_{t\to\infty} i(t) = 0$ **1**

3.3 Der Graph hat einen HOP und verläuft für x → ∞ gegen Null. Somit muss er seine Krümmung von rechts auf links ändern. **2**

LA:

1.
$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \end{array} \rightarrow \lambda = \mu = \sigma = 0;\ lin.u. + Basis$$ **4**

2.1.1 $\overrightarrow{EC} = -\vec{c} + \vec{a} + \vec{b}$ **1**

2.1.2. $\overrightarrow{DF} = \vec{a} - 0{,}5\vec{b}$ **1**

2.2. $|\overrightarrow{FS}|:|\overrightarrow{SE}| = 1:2$ **1**

2.3.1 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2} = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{4^2} = 3;$ $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ **3**

$ABCD\ ist\ rechteckig, nicht\ quadratisch$

2.3.2 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{0A} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = (6|1|0) + (-2|1{,}5|0) = (4|2{,}5|0)$; **4**

$V_P = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 16\ (VE)$