2. Schulaufgabe aus der Mathematik 13. Klassen der FOS/BOS am 19.04.2021

Arbeitszeit: 75 min **Gesamt BE: 40**

Analysis

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = \ln(-x^2 + 7x - 6)$, ihr Graph heißt G_f.

a) Bestimmen Sie den vollständigen Definitionsbereich D_f und untersuchen Sie das Verhalten von *f* an den Rändern von D_f und geben Sie die Gleichung aller Asymptoten von G_f an. (5 BE)

b) Bestimmen Sie Art und Lage des Extrempunktes von *f*. (4 BE)

c) Skizzieren Sie den Verlauf von G_f und alle Asymptoten unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein passendes Koordinatensystem. (3 BE)

Aufgabe 2

Geben Sie die Funktion *g* mit $g(x) = \ln\left(\frac{8x}{x^2-9}\right)$ und $D_g =]-3; 0[\cup]3; +\infty[$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion *g*. (2 BE)

b) Beschreiben Sie in ganzen Sätzen, wie sich der Grenzwert von *g* für x gegen positiv unendlich entwickelt. (2 BE)

Aufgabe 3

Eine großer Kuhzuchtbetrieb hält eine Herde von 1.000 Tieren. An einem Tag ($t = 0$) stellt der Züchter fest, dass 50 Kühe an einer Hufkrankheit leiden. Die Krankheit ist zwar nicht tödlich, schränkt die Tiere aber stark ein.

Der Züchter weiß aus Erfahrung, dass die Anzahl der erkrankten Tiere sich näherungsweise mit Hilfe einer Funktion *B* mit

$$B(t) = G - g \cdot e^{-k \cdot t} \text{ und } t \geq 0$$

beschreiben lässt. Dabei ist *t* die Zeit in Tagen seit dem Beobachtungsbeginn.

a) In diesem Sachzusammenhang ist $G = 1000$. Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $g \cdot e^{-k \cdot t}$ und begründen Sie, dass $g = 950$ angesetzt werden muss. (2 BE)

b) Am nächsten Tag ($t = 1$), zählt der Züchter 87 kranke Tiere. Bestimmen Sie auf dieser Grundlage den Parameter k auf vier Nachkommastellen genau. (2 BE)
(Hinweis: G=1000 und g=950 gilt auch für diese Teilaufgabe)

c) Auch durch die Zählungen der nächsten Tage werden die Prognosen im Wesentlichen bestätigt. Es kann mit $B(t) = 1000 - 950 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t}$ gearbeitet werden.
Bestimmen Sie, nach wie vielen Tagen die Hälfte der Kühe von der Krankheit befallen ist.
(2 BE)

Bitte wenden!

d) Der Züchter mischt ein Medikament ins Trinkwasser und erwartet sich ab dem 6. Tag eine Verbesserung. Zu diesem Zeitpunkt sind bereits 253 Tiere infiziert. Für die neue Bestandsfunktion M wird eine Ansteckungsrate von 0,08 und eine Heilungswirkung von 0,012 angenommen. Daraus ergibt sich die Funktion $M(t) = 253 \cdot e^{0{,}08(t-6)-0{,}012(t-6)^2}$ mit $t \geq 6$.
Ermitteln Sie den Tag, ab dem die Anzahl der erkrankten Tiere wieder fällt.
(mögliches Zwischenergebnis: $M'(t) = (-6{,}072t + 56{,}672) \cdot e^{0{,}08(t-6)-0{,}012(t-6)^2}$) (4 BE)

Analytische Geometrie

Aufgabe 4

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(6|\,3|\,2)$, $B(1|\,7|\,2)$, und $C(-5|\,2|\,2)$ gegeben, diese beschreiben eindeutig die Ebene *E*.

a) Stellen Sie eine Gleichung dieser Ebene *E* in Parameterform und Koordinatenform auf. Beschreiben Sie außerdem die Lage der Ebene E im Koordinatensystem. (5 BE)

b) Die Punkte A, B und C sind zusammen mit $D(1|\,4|\,5)$ Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide.
Berechnen Sie die Maßzahl für das Volumen der Pyramide und zeichnen Sie die Pyramide in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem. (5 BE)

c) Die Ebene F: $-3x_1 + 33x_2 - 16x_3 = 49$ beinhaltet die Punkte A, C und D.
Zeigen Sie, dass sich die Ebene F und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$
schneiden und bestimmen Sie den Schnittpunkt. (3 BE)

d) Geben Sie eine Ebenengleichung an, zu der die Gerade g (Aufgabe 4 c) echt parallel ist. (1 BE)

Viel Erfolg!

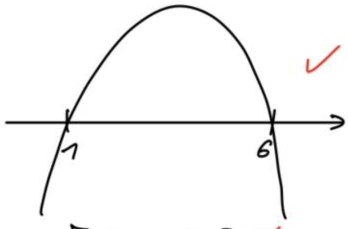
Erwartungshorizont:

1 a) $-x^2+7x-6>0$

$0=-x^2+7x-6$

$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4(-1)(-6)}}{-2}$

$x_1=1\ ;\ x_2=6$ $\qquad D_f=\,]1;6[$



5

$\lim\limits_{x\to1^+}\ln(\underbrace{-x^2+7x-6}_{\to0^+})=-\infty\ ;\ \lim\limits_{x\to6^-}\ln(\underbrace{-x^2+7x-6}_{\to0^+})=-\infty$

G_f hat zwei senkrechte Asymptoten bei $x=1$ und $x=6$.

1 b) $f'(x)=\frac{1}{-x^2+7x-6}\cdot(-2x+7)=\frac{-2x+7}{-x^2+7x-6}$

4

$0=-2x+7$

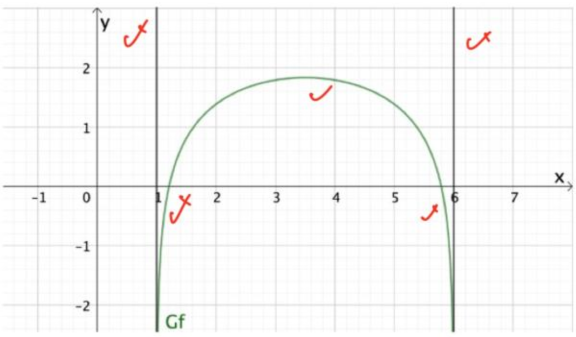
$x_1=\frac{7}{2}$

x		1		$\frac{7}{2}$		6	
$f'(x)$	/	u.d.	+	0	−	u.d.	/
G_f	/	u.d.	↗	HoP	↘	u.d.	/

$f(\frac{7}{2})=\ln(6{,}25)\approx1{,}83$

HoP $(\frac{7}{2}\mid\ln(6{,}25))$

1 c)



3

2 a) $g(x)=0$

$\frac{8x}{x^2-9}=1$

$8x=x^2-9$

$0=x^2-8x-9$

$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot(-9)}}{2}$

$x_1=9$

$x_2=-1$

2

2 b) Das Argument geht gegen null, da $Z<N$. Damit muss sich der Graph von g gegen $-\infty$ entwickeln.

2

3 a) $g \cdot e^{-k \cdot t}$ beschreibt die Anzahl der gesunden Tiere in Abhängigkeit von t. Zum Zeitpunkt des Beobachtungs beginns sind bereits 50 Tiere erkrankt. $\Rightarrow g = 950$ ✓ 2

b) $87 = 1000 - 950 \cdot e^{-k}$

$913 = 950 e^{-k}$ ✓

$\frac{913}{950} = e^{-k}$

$\ln\left(\frac{913}{950}\right) = -k$

$k = -\ln\left(\frac{913}{950}\right) \approx 0{,}0397$ ✓ 2

c) $500 = 1000 - 950 e^{-0{,}04t}$

$500 = 950 e^{-0{,}04t}$ ✓

$\frac{500}{950} = e^{-0{,}04t}$

$\ln\left(\frac{500}{950}\right) = -0{,}04t$

$t = 16{,}0463$ ✓ 2

Nach etwa 16 Tagen ist die Hälfte der Tiere erkrankt.

d) $M'(t) = 253 \cdot e^{0{,}08(t-6) - 0{,}012(t-6)^2} \cdot (0{,}08t - 0{,}012 \cdot 2(t-6))$ ✓

$= (20{,}24 - 6{,}072(t-6)) \cdot e^{0{,}08(t-6) - 0{,}012(t-6)^2}$ ✗

$M'(t) = 0 \Leftrightarrow 20{,}24 - 6{,}072(t-6) = 0$

$t = \frac{20{,}24}{6{,}072} + 6$ ✓ 4

$t = \frac{28}{3} \approx 9{,}3$

x		$\frac{28}{3}$	
$M'(t)$	+	0	−
G_M	↗	HoP	↘

✓

Ab dem 9. Tag wird die Anzahl der erkrankten Tiere wieder fallen. ✗

4a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1-6\\7-3\\2-2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-5-6\\2-3\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-5\\4\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-11\\-1\\0\end{pmatrix}; \; s,t \in \mathbb{R}$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}-5\\4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-11\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 - 0\\0 - 0\\5 + 44\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\49\end{pmatrix}$$

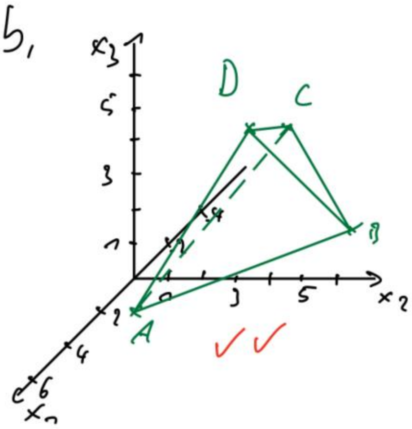
$$d = \begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\49\end{pmatrix} = 98$$

$E: 49x_3 = 98 \iff E: x_3 = 2$

E ist parallel zur x_1x_2-Ebene.

5

b)



$\vec{AB} = \begin{pmatrix}-5\\4\\0\end{pmatrix}; \; \vec{AC} = \begin{pmatrix}-11\\-1\\0\end{pmatrix}; \; \vec{AD} = \begin{pmatrix}-5\\1\\3\end{pmatrix}$

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{6}\left|\left(\begin{pmatrix}-5\\4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-11\\-1\\0\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}-5\\1\\3\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\0\\49\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-5\\1\\3\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot 147 = 24{,}5 \text{ FE}$$

5

c)

$F: -3x_1 + 33x_2 - 16x_3 = 49$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2r\\3\end{pmatrix}$$

g in F: $-3 + 66r - 48 = 49$

$66r = 100$

$r = \frac{50}{33}$

$\Rightarrow g$ schneidet F

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \frac{50}{33}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\frac{100}{33}\\3\end{pmatrix}$$

$S(1 \mid \frac{100}{33} \mid 3)$

d) $E: x_3 = 2$

1