Therese-von-Bayern-Schule München
Staatliche FOSBOS Wirtschaft
München

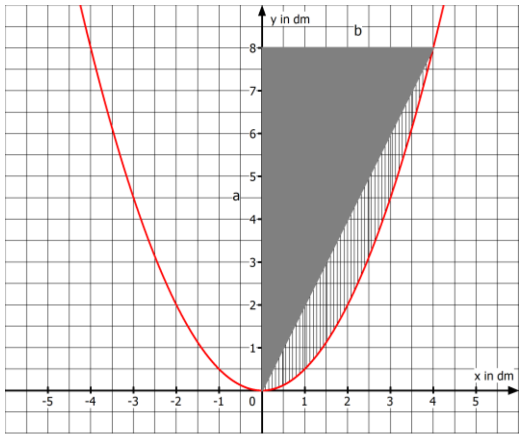
2. Schulaufgabe aus der Mathematik

Klassen: FOS12, Datum:28.04.2022 mHiMi, 75min.

Teil I: Analysis

Aufgabe 1: (5 BE)

Ein Designstudio hat eine Lampe entworfen. Diese besteht aus einem parabelförmigen Schirm, der durch den Funktionsterm $p(x) = 0{,}5x^2$ beschrieben werden kann (siehe Querschnitt). Innerhalb des Schirms soll eine Reflexionsfläche eingebaut werden (im Querschnitt durch das graue Dreieck erkennbar). Die Seite a des Dreiecks soll 8 dm, die Seite b soll 4 dm betragen (Querschnittsskizze maßstabsgetreu). Ermitteln Sie den Flächeninhalt (schraffierte Fläche im Querschnitt) des Leerraums zwischen der grauen Fläche und der Lampe.



Aufgabe 2: (7 BE)

Gegeben sind die beiden Funktionen $g(x) = e^x$ *und* $k(x) = e^{-x+2}$ *mit* $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

2.1 Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Funktionen g und k. (3 BE)
2.2 Untersuchen Sie das Grenzverhalten von k. (1 BE)
2.3 Zeichnen Sie die beiden Funktionen in ein kartesisches Koordinatensystem. (3 BE)

Aufgabe 3: (5 BE)

Ein Schüler der 12. Klasse an der Therese-von-Bayern Schule übt für das Abitur. Er berechnet Aufgaben aus einem Übungsheft.
Mit der Zeit wird er immer besser und löst mehrere Aufgaben.
Die Anzahl der richtigen Aufgaben kann durch die Funktion f mit dem Funktionsterm

$$f(t) = -50e^{-\frac{1}{20}t} + 50$$

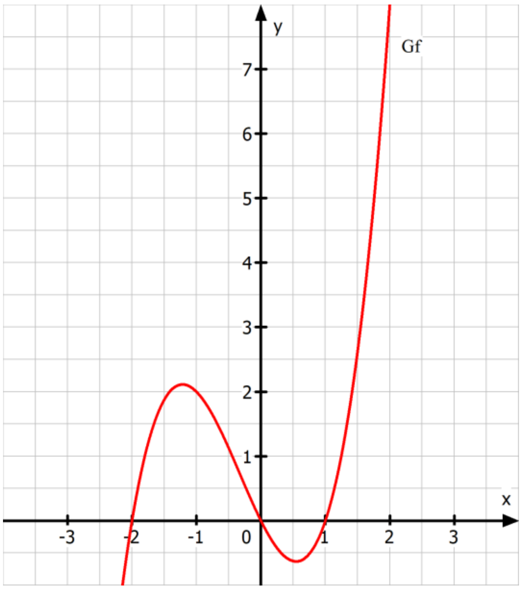
beschrieben werden.
Hierbei gibt $f(t)$ die Anzahl der korrekten Aufgaben an und t die Übungszeit in Stunden.

3.1 Geben Sie an, wie viele Übungsaufgaben der Schüler nach langem Üben richtig hat. (1 BE)
3.2 Bestimmen Sie die Anzahl der richtig gelösten Aufgaben nach 20 Übungsstunden, abgerundet auf ganze Aufgaben. (1 BE)
3.3 Der Schüler ist mit seiner Leistung zufrieden, wenn er von allen Aufgaben 40 richtig löst. Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem die angestrebte Leistung erreicht ist. (3 BE)

bitte wenden!

<u>Aufgabe 4: (9 BE)</u>

Die Abbildung zeigt den Ausschnitt des Graphen G_f einer Funktion f.
F sei eine Stammfunktion von f.



4.1 Begründen Sie, ob und an welchen Stellen alle Stammfunktionen F im Bereich $-3 < x < 2$ Extremstellen, Wendestellen und Nullstellen Besitzen müssen. Erläutern Sie auch die Art der Extrema. (5 BE)

4.2 Beschreiben Sie verbal, was mit folgender Berechnung gezeigt wird: F(2) - F(1)= 4 (1 BE)

4.3 Berechnen Sie eine beliebige Stammfunktion F von f. Stellen Sie hierzu zunächst den Funktionsterm von f auf. f hat den Leitkoeffizienten $a = 1$. (3 BE)

Teil II: Stochastik

<u>Aufgabe 1: (11 BE)</u>

Die Controlling-Abteilung einer Schokoladenfabrik untersucht das Gewicht von Schokoladenosterhasen.
Man weiß, dass die Schokoladenosterhasen mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% von ihrem Sollgewicht (50g) abweichen. Untersucht werden 20 Osterhasen.

1.1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht genau ein Osterhase von der Norm ab? (1 BE)

1.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Osterhase von der Norm abweicht. (1 BE)

1.3 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 17 Osterhasen nicht von der Norm abweichen. (2 BE)

1.4 Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei aufeinander folgende Hasen von der Norm abweichen und alle anderen normkonform sind? (2 BE)

1.5 Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der von der Norm abweichenden Osterhasen innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert? (5 BE)

<u>Aufgabe 2: (3 BE)</u>

In der vergangenen Saison erreichten das Unternehmen häufig Beschwerden über beschädigte Verpackungen der Osterhasen. Die von einem Zustelldienst gelieferten Schokoladenosterhasen werden stichpunktartig kontrolliert. Hierbei stellt sich heraus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Verpackung beschädigt ist, 95% beträgt. Die stichpunktartige Untersuchung beinhaltet 6 Pakete.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine der Verpackungen beschädigt? (3 BE)

VIEL ERFOLG!

Lösungsvorschlag:

1.

$$A\,(Dreieck) = 0{,}5 \cdot 8 \cdot 4 = 16$$

$$\int_0^4 8 - (0{,}5x^2)dx = \left[8x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^4 = 21{,}33 \Rightarrow A\,(weiße\ Fläche) = 21{,}33 - 16 = 5{,}33\ dm^2$$

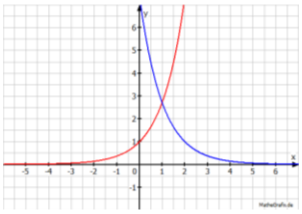
2.1

$$f(x) = k(x)$$
$$e^x = e^{-x+2} | ln$$
$$x = -x + 2;\ 2x = 2;\ x = 1;\ S(1|e)$$

2.2

$$\lim_{x\to+\infty} k(x) = 0;\ \lim_{x\to-\infty} k(x) = +\infty$$

2.3



3.1 $x \to \infty\ ;\ f(x) \to 50$

3.2 *f(20)=19,7 er löst 20 Aufgaben korrekt.*

3.3 *80 % von 50 sind 40 richtige Aufgaben*

$$-50e^{-\frac{1}{20}t} + 50 = 40$$
$$-50e^{-\frac{1}{20}t} = -10$$
$$e^{-\frac{1}{20}t} = \frac{1}{5}$$
$$-\frac{1}{20}t = \ln\frac{1}{5}$$
$$t = \ln\frac{1}{5} \cdot (-20) = 32{,}2$$

4.1 f hat an den Stellen x= -2, x=0 und x=1 jeweils eine einfache Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel. ➔ An der Stelle x=-2 hat F einen Tiefpunkt, an der Stelle x=0 hat F einen Hochpunkt und a.d.St. x=1 einen Tiefpunkt. An den Stellen x=-1,25 und x= 0,6 hat f eine Extremstelle, somit hat F an diesen Stellen Wendepunkte. Ob F Nullstellen hat, kann keine Aussage getroffen werden, da dies von der Integrationskonstante C abhängt.

4.2 Die Fläche, die der Graph im Intervall [1;2] mit der x-Achse einschließt beträgt 4 FE.

4.3

$$f(x) = x \cdot (x+2) \cdot (x-1) = (x^2 + 2x)(x-1) = x^3 + x^2 - 2x$$
$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$$

S:

1.6 $(X = 1) = 0{,}27017$

1.7 $P(X \le 1) = 0{,}39175$

1.8 $p = 0{,}9: P(X \ge 18) = 1 - P(X \le 17) = 1 - 0{,}32307 = 0{,}67693$

1.9 $0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{18} \cdot 19 = 0{,}11407$

1.10 $\mu = 0{,}1 \cdot 20 = 2;\ \sigma = \sqrt{0{,}1 \cdot 20 \cdot 0{,}9} = 1{,}34;\ \mu - \sigma = 0{,}66;\ \mu + \sigma = 3{,}34;\ P(0{,}66 \le X \le 3{,}34) = P(1 \le X \le 3) = 0{,}74547$

2.

$$P(X \ge 1) = 0{,}95;\ 1 - P(X = 0) = 0{,}95;\ 1 - \binom{6}{0} \cdot p^0 \cdot q^6 = 0{,}95$$
$$1 - 1 \cdot 1 \cdot q^6 = 0{,}95;\ q^6 = 0{,}05;\ q \le \sqrt[6]{0{,}05} = 0{,}61;\ also: p = 0{,}39$$