Therese-von-Bayern-Schule 17.01.2022

Arbeitszeit: 55 Minuten 1. Schulaufgabe aus der Mathematik F11 B 30 BE

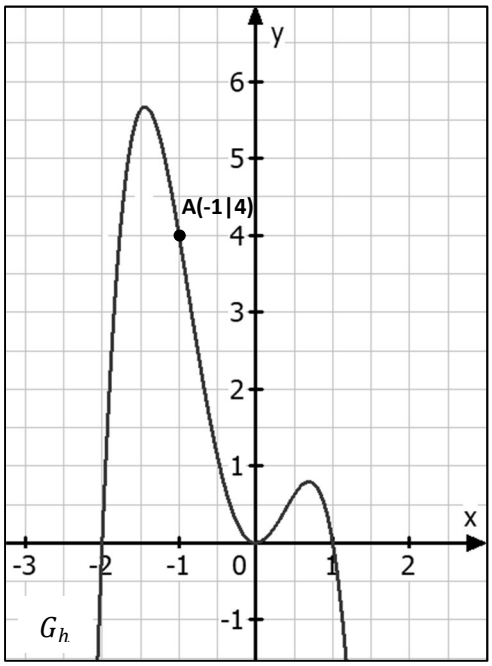
Hilfsmittel: Taschenrechner, Merkhilfe

Unterstreichen Sie Ergebnisse und runden Sie ggf. auf zwei Nachkommastellen. Antworten Sie auf Textaufgaben in einem Antwortsatz mit Bezug zum Sachzusammenhang. Begründen Sie alle Ihre Schritte genau z. B. durch Rechnungen oder klar verständliche Sätze. Achten Sie auf Rechtschreibung und eine saubere äußere Form.

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^4 - 0{,}25x^3 - 2x^2 - 1{,}25x$.

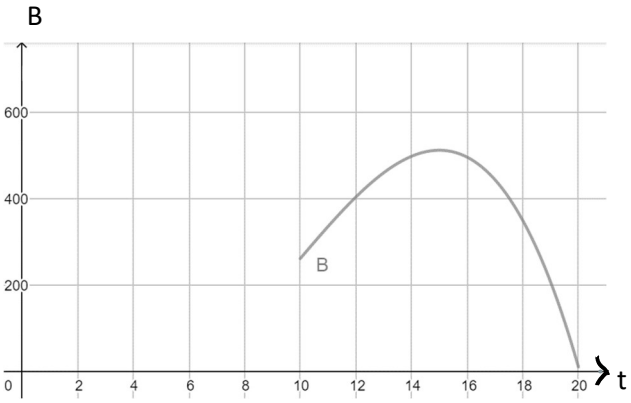
1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f samt ihrer Vielfachheiten. Geben Sie anschließend den Funktionsterm in Linearfaktorform an. (7 BE)

1.2 Gegeben ist der Graph G_h der reellen Funktion vierten Grades. Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung $h(x)$. (3 BE)



1.3 Widerlegen Sie folgende Aussage mit Hilfe eines selbstgewählten Beispiels:
„Der Term einer ganzrationalen Funktion dritten Grades kann immer in drei Linearfaktoren zerlegt werden.“ (2 BE)

2.0 Der Verlauf der Besucherzahlen (B) eines Biergartens kann an einem Tag im Juli 2020 in Abhängigkeit von der Zeit (t) (in Stunden nach Mitternacht) näherungsweise durch die reelle Funktion B mit $B(t) = -t^3 + 30t^2 - 225t + 512$ beschrieben werden. Der Biergarten öffnet um 10:00 Uhr und schließt aufgrund der Corona-Beschränkungen um 20:00 Uhr.



2.1 Geben Sie einen geeigneten Definitionsbereich für die Funktion B an. (1 BE)

2.2 Berechnen Sie die Anzahl der Besucher um 12.30 Uhr. (2 BE)

2.3 Berechnen Sie die Uhrzeit, zu welcher genau 512 Besucher im Biergarten waren. (3 BE)

2.4 Der Biergarten-Betreiber gibt bei einer polizeilichen Befragung an, dass bei seinem Biergarten die Sperrstunde um 20 Uhr exakt eingehalten wurde. Nehmen Sie rechnerisch Stellung zu seiner Aussage. (2 BE)

3.0 Bei der Sommerparty der Therese-von-Bayern Schule werden Kaltgetränke zu 26 % in Wegwerfbechern (B), 23 % in Gläsern (G) und der Rest in Pfandflaschen (F) verkauft. Die Bestimmung des Kaufverhaltens eines zufällig ausgewählten Partygastes, der zwei Kaltgetränke kauft, wird als Zufallsexperiment aufgefasst. Die Wahl des zweiten Getränks ist unabhängig von der ersten Wahl. Jedoch werden aus Umweltgründen nach dem ersten Getränk aus einem Wegwerfbecher nur noch Getränke aus Gläsern angeboten.
Die relativen Häufigkeiten werden dabei als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

3.1 Erstellen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und bestimmen Sie den Ergebnisraum sowie die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse in Prozent. Geben Sie die Mächtigkeit des Ergebnisraums an. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen. (5 BE)

3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Schüler mindestens ein Kaltgetränk im Glas kauft. Geben Sie das Ereignis (E_1) auch in aufzählender Mengenschreibweise an. (2 BE)

3.3 Es sei $E_2 = \{GG; FF\}$. Geben Sie $E_1 \cap E_2$ in aufzählender Mengenschreibweise sowie möglichst einfach in Worten an. Zeichnen Sie ein geeignetes Venn-Diagramm. (3 BE)

LÖSUNGSHINWEISE

Therese-von-Bayern-Schule 17.01.2022

Arbeitszeit: 55 Minuten 1. Schulaufgabe aus der Mathematik F11 B 30 BE

Hilfsmittel: Taschenrechner, Merkhilfe

Unterstreichen Sie Ergebnisse und runden Sie ggf. auf zwei Nachkommastellen. Antworten Sie auf Textaufgaben in einem Antwortsatz mit Bezug zum Sachzusammenhang. Begründen Sie alle Ihre Schritte genau z. B. durch Rechnungen oder klar verständliche Sätze. Achten Sie auf Rechtschreibung und eine saubere äußere Form.

2.0 Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^4 - 0{,}25x^3 - 2x^2 - 1{,}25x$.

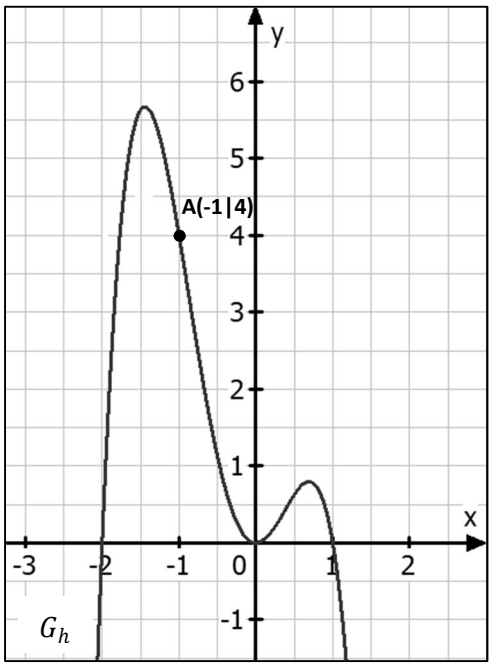
1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f samt ihrer Vielfachheiten. Geben Sie anschließend den Funktionsterm in Linearfaktorform an. (7 BE)

$f(x) = 0$ $0 = 0{,}5x(x^3 - 0{,}5x^2 - 4x - 2{,}5)$ $x_1 = 0$; durch probieren $x_2 = -1$

$(x^3 - 0{,}5x^2 - 4x - 2{,}5) : (x + 1) = x^2 - 1{,}5x - 2{,}5$ $x_3 = 2{,}5$ und $x_4 = -1$

$f(x) = 0{,}5x(x - 2{,}5)(x + 1)^2$

1.2 Gegeben ist der Graph G_h der reellen Funktion vierten Grades. Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung $h(x)$. (3 BE)



$h(x) = -2x^2(x + 2)(x - 1)$

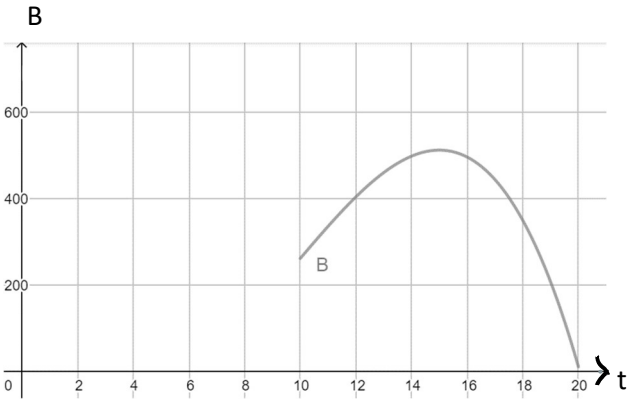
1.3 Widerlegen Sie folgende Aussage mit Hilfe eines selbstgewählten Beispiels:

„Der Term einer ganzrationalen Funktion dritten Grades kann immer in drei Linearfaktoren zerlegt werden." (2 BE)

[Der Grad einer Funktion gibt die maximale Anzahl der Nullstellen an.]

Zum Beispiel: $f(x) = (x^2 + 2)(x - 1)$. Hier kann der Faktor $(x^2 + 2)$ nicht weiter in zwei Linearfaktoren zerlegt werden.

2.0 Der Verlauf der Besucherzahlen (B) eines Biergartens kann an einem Tag im Juli 2020 in Abhängigkeit von der Zeit (t) (in Stunden nach Mitternacht) näherungsweise durch die reelle Funktion B mit $B(t) = -t^3 + 30t^2 - 225t + 512$ beschrieben werden. Der Biergarten öffnet um 10:00 Uhr und schließt aufgrund der Corona-Beschränkungen um 20:00 Uhr.



2.1 Geben Sie einen geeigneten Definitionsbereich für die Funktion B an. (1 BE)

$\mathbb{D} = [10;20]$

2.2 Berechnen Sie die Anzahl der Besucher um 12.30 Uhr. (2 BE)

$B(12{,}5) = 433{,}875$ → 434 Personen.

2.3 Berechnen Sie die Uhrzeit, zu welcher genau 512 Besucher im Biergarten waren. (3 BE)

$512 = -t^3 + 30t^2 - 225t + 512$ $\quad$ $0 = -t(t^2 - 30t + 225)$

$t_1 = 0$ ($\notin \mathbb{D}$ → fällt weg!) und $t_{2/3} = 15$ → Um 15 Uhr waren 512 Besucher anwesend.

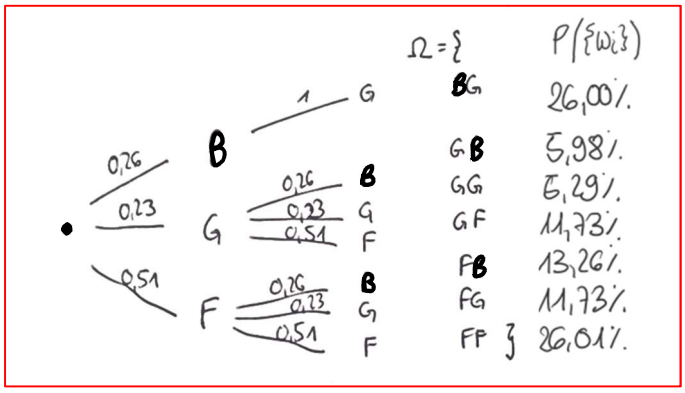
2.4 Der Biergarten-Betreiber gibt bei einer polizeilichen Befragung an, dass bei seinem Biergarten die Sperrstunde um 20 Uhr exakt eingehalten wurde. Nehmen Sie rechnerisch Stellung zu seiner Aussage. (2 BE)

$B(20) = (-20)^3 + 30 \cdot 20^2 - 225 \cdot 20 + 512 = 12$

Aussage des Betreibers ist falsch, da um 20 Uhr noch 12 Personen im Biergarten waren.

3.0 Bei der Sommerparty der Therese-von-Bayern Schule werden Kaltgetränke zu 26 % in Wegwerfbechern *(B)*, 23 % in Gläsern *(G)* und der Rest in Pfandflaschen *(F)* verkauft. Die Bestimmung des Kaufverhaltens eines zufällig ausgewählten Partygastes, der zwei Kaltgetränke kauft, wird als Zufallsexperiment aufgefasst. Die Wahl des zweiten Getränks ist unabhängig von der ersten Wahl. Jedoch werden aus Umweltgründen nach dem ersten Getränk aus einem Wegwerfbecher nur noch Getränke aus Gläsern angeboten.
Die relativen Häufigkeiten werden dabei als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

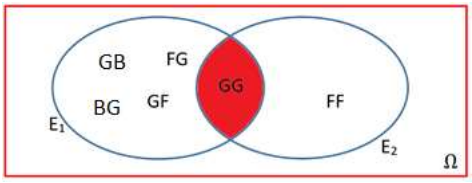
3.1 Erstellen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und bestimmen Sie den Ergebnisraum sowie die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse in Prozent. Geben Sie die Mächtigkeit des Ergebnisraums an. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen. (5 BE)



$|\Omega| = 7$

3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Schüler mindestens ein Kaltgetränk im Glas kauft. Geben Sie das Ereignis (E_1) auch in aufzählender Mengenschreibweise an. (2 BE)
$P(E_1) = 26\,\% + 5{,}98\,\% + 5{,}29\,\% + 11{,}73\,\% + 11{,}73\,\% = 60{,}73\,\%$
$E_1 = \{BG;\ GB;\ GG;\ GF;\ FG\}$

3.3 Es sei $E_2 = \{GG; FF\}$. Geben Sie $E_1 \cap E_2$ in aufzählender Mengenschreibweise sowie möglichst einfach in Worten an. Zeichnen Sie ein geeignetes Venn-Diagramm. (3 BE)
$E_1 \cap E_2 = \{GG\}$
Der Gast kauft ausschließlich Getränke in Gläsern.



Therese-von-Bayern-Schule 2.2.2022

Arbeitszeit: 55 Minuten 1. Schulaufgabe aus der Mathematik F11A 30 BE

Hilfsmittel: Taschenrechner, Merkhilfe

Unterstreichen Sie Ergebnisse und runden Sie ggf. auf zwei Nachkommastellen. Antworten Sie auf Textaufgaben in einem Antwortsatz mit Bezug zum Sachzusammenhang. Begründen Sie alle Ihre Schritte genau z. B. durch Rechnungen oder klar verständliche Sätze. Achten Sie auf Rechtschreibung und eine saubere äußere Form.

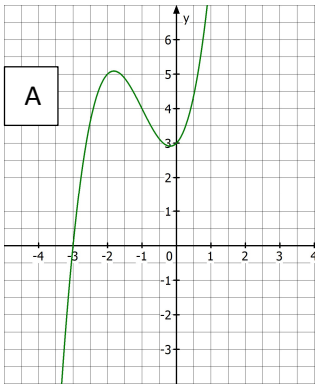
1.1 Gegeben ist die reelle Funktion g mit $g(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x^5 - 2x^3 - 8x)$.

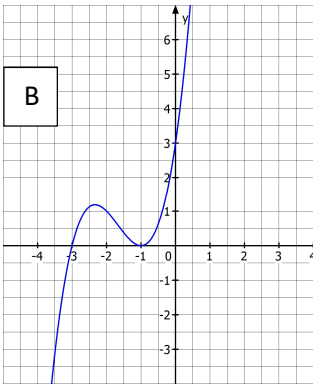
Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion g und deren Vielfachheiten. Geben Sie anschließend den Funktionsterm mit Linearfaktoren in Produktform an. (6 BE)

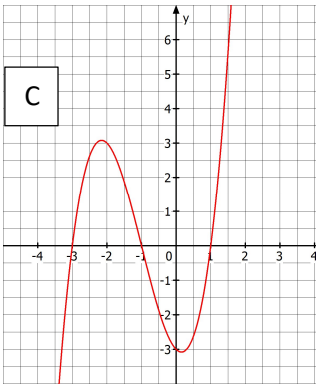
1.2 Nennen Sie einen möglichen Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion vierten Grades, deren Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist, den Ursprung an der x-Achse berührt und die x-Achse an der Stelle -4 schneidet. (2 BE)

1.3 Ordnen Sie den beiden Funktionstermen $f(x) = (x+3)(x^2-1)$ und $g(x) = (x+3)(x+1)^2$ jeweils einen passenden Graphen (A, B, C) zu.

Begründen Sie Ihre Zuordnung. (3 BE)







2.0 In einer Studie der LMU München soll die Wirkstoffkonzentration (c in $\frac{mg}{l}$) eines Medikaments im Blut untersucht werden. Die Wirkstoffkonzentration kann durch die reelle Funktion c mit $c(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}51t^2 + 6{,}5025t$ (t in Stunden nach Verabreichung) beschrieben werden.

2.1 Geben Sie die Wirkstoffkonzentration nach 10 Stunden an. (1 BE)

2.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt zu dem der Wirkstoff im Blut vollständig abgebaut ist. (3 BE)

2.3 Betrachten Sie den Graphen G_c. Berechnen Sie die maximale Wirkstoffkonzentration c bei t = 8,5. Geben Sie den Wertebereich für die Funktion c an. Kennzeichnen Sie den Wertebereich im untenstehenden Koordinatensystem. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. (3 BE)

2.4 Laut Beipackzettel ist die Fahrtüchtigkeit bei einer Wirkstoffkonzentration von über 14,00 $\frac{mg}{l}$ nicht mehr gewährleistet. Ein Patient, der das Medikament um 15:00 Uhr eingenommen hat, behauptet, er kann am nächsten Tag um 07:00 Uhr wieder mit dem Auto zur Arbeit fahren. Nehmen Sie rechnerisch Stellung zu dieser Aussage. (2 BE)

3.0 Die „Healthy Pocci“ Apotheke bietet ihren erkälteten Kunden Hustensaft (H), Kopfschmerztabletten (K) und Nasenspray (N) an. Im Folgenden werden nur diese drei Medikamente betrachtet.

Aus Erfahrung weiß der Apotheker, dass unabhängig voneinander 32 % der Kunden einen Hustensaft erwerben und jeder vierte Kunde Kopfschmerztabletten kauft. Kunden kaufen zu 65 % auch einen Nasenspray, wenn sie mindestens eines der anderen Medikamente erwerben, ansonsten kaufen sie kein Nasenspray. Der Einkauf eines beliebigen herausgegriffenen Kunden wird als Zufallsexperiment aufgefasst. Die relativen Häufigkeiten werden dabei als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

3.1 Erstellen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und bestimmen Sie den Ergebnisraum sowie die Wahrscheinlichkeit aller Elementarereignisse in Prozent. Runden Sie nicht! (6 BE)

3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit (in %), mit welcher ein zufällig ausgewählter Kunde keine Kopfschmerztabletten kauft. Geben Sie das Ereignis (E_1) auch in aufzählender Mengenschreibweise an. (2 BE)

3.3 Gegeben ist das Ereignis $E_2 = \{HKN;\ H\bar{K}N;\ \bar{H}KN;\ \bar{H}\bar{K}N\}$. Stellen Sie $E_1 \cap E_2$ mit Hilfe eines Venn-Diagramms dar. (1 BE)

3.4 Der Apothekenbesitzer beklagt, dass sich mindestens jeder zweite Kunde über die Produkte informiert, aber anschließend nichts in der Apotheke kauft, sondern im Internet bestellt. Nehmen Sie Stellung zu dieser Aussage. (1 BE)

LÖSUNGSHINWEISE

Therese-von-Bayern-Schule 2.2.2022

Arbeitszeit: 55 Minuten 1. Schulaufgabe aus der Mathematik F11A 30 BE

Hilfsmittel: Taschenrechner, Merkhilfe

Unterstreichen Sie Ergebnisse und runden Sie ggf. auf zwei Nachkommastellen. Antworten Sie auf Textaufgaben in einem Antwortsatz mit Bezug zum Sachzusammenhang. Begründen Sie alle Ihre Schritte genau z. B. durch Rechnungen oder klar verständliche Sätze. Achten Sie auf Rechtschreibung und eine saubere äußere Form.

1.1 Gegeben ist die reelle Funktion g mit $g(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x^5 - 2x^3 - 8x)$.

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion g und deren Vielfachheiten. Geben Sie anschließend den Funktionsterm mit Linearfaktoren in Produktform an. (6 BE)

$-\frac{1}{\sqrt{3}}(x^5 - 2x^3 - 8x) = 0$ $x(x^4 - 2x^2 - 8) = 0$ $x_1 = 0;$

$x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

1) Substitution: $x^2 := z$ → $z^2 - 2z - 8 = 0$

$z_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$

$z = 4$ oder $z_2 = -2$

2) Resubstitution $z := x^2$ $x^2 = 4$ → $x_2 = 2; x_3 = -2$

oder $x^2 = -2$ → (liefert keine weitere Lösung)

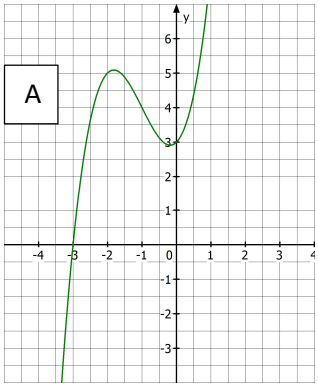
$g(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}x(x-2)(x+2)(x^2+2)$

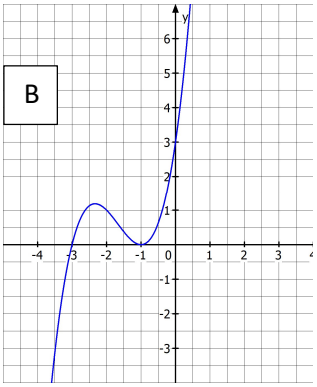
1.2 Nennen Sie einen möglichen Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion vierten Grades, deren Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist, den Ursprung an der x-Achse berührt und die x-Achse an der Stelle -4 schneidet. (2 BE)

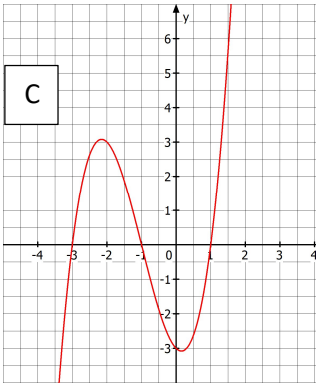
$f(x) = x^2(x+4)(x-4)$

1.3 Ordnen Sie den beiden Funktionstermen $f(x) = (x+3)(x^2-1)$ und $g(x) = (x+3)(x+1)^2$ jeweils einen passenden Graphen (A, B, C) zu.

Begründen Sie Ihre Zuordnung. (3 BE)







g(x) ist der passende Term für Graph B, da dieser eine doppelte NST bei x = -1 besitzt.

f(x) ist der passende Term für Graph C, da sich durch $(x^2 - 1) = 0$ die einfachen Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ ergeben.

(0,5 BE für Zuordnung, 1 BE für Begründung.)

2.0 In einer Studie der LMU München soll die Wirkstoffkonzentration (c in $\frac{mg}{l}$) eines Medikaments im Blut untersucht werden. Die Wirkstoffkonzentration kann durch die reelle Funktion c mit $c(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}51t^2 + 6{,}5025t$ (t in Stunden nach Verabreichung) beschrieben werden.

2.1 Geben Sie die Wirkstoffkonzentration nach 10 Stunden an. (1 BE)

$c(10) = 24{,}025$ → $24{,}03\frac{mg}{l}$

2.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt zu dem der Wirkstoff im Blut vollständig abgebaut ist. (3 BE)

$c(t) = 0$
$c(t) = t(0{,}01t^2 - 0{,}51t + 6{,}5025)$ $(t_1 = 0)$

$t_{2/3} = 25{,}5$ → Nach 25,5 Stunden ist das Medikament vollständig abgebaut.

2.3 Betrachten Sie den Graphen G_c. Berechnen Sie die maximale Wirkstoffkonzentration c bei t = 8,5. Geben Sie den Wertebereich für die Funktion c an. Kennzeichnen Sie den Wertebereich im untenstehenden Koordinatensystem. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. (3 BE)

2.4 Laut Beipackzettel ist die Fahrtüchtigkeit bei einer Wirkstoffkonzentration von über 14,00 $\frac{mg}{l}$ nicht mehr gewährleistet. Ein Patient, der das Medikament um 15:00 Uhr eingenommen hat, behauptet, er kann am nächsten Tag um 07:00 Uhr wieder mit dem Auto zur Arbeit fahren. Nehmen Sie rechnerisch Stellung zu dieser Aussage. (2 BE)

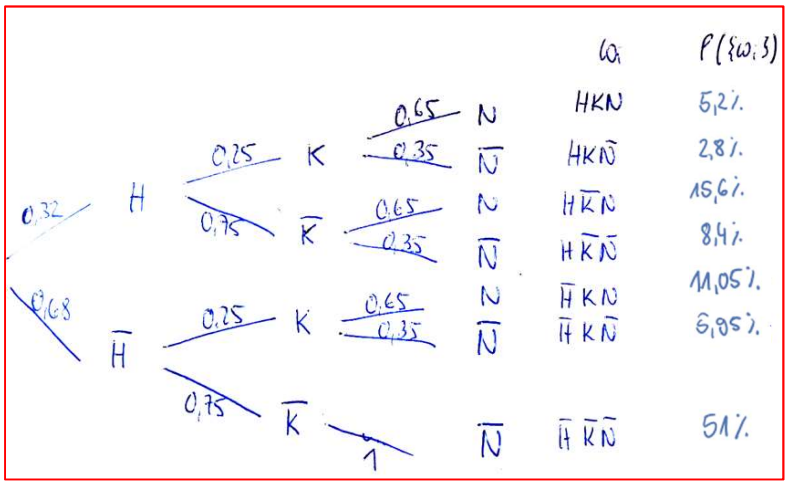
$c(16) = 14{,}44$

Die Aussage des Patienten ist falsch, da die Wirkstoffkonzentration $0{,}44\frac{mg}{l}$ über dem angegebenen Grenzwert liegt.

3.0 Die „Healthy Pocci“ Apotheke bietet ihren erkälteten Kunden Hustensaft (H), Kopfschmerztabletten (K) und Nasenspray (N) an. Im Folgenden werden nur diese drei Medikamente betrachtet.

Aus Erfahrung weiß der Apotheker, dass unabhängig voneinander 32 % der Kunden einen Hustensaft erwerben und jeder vierte Kunde Kopfschmerztabletten kauft. Kunden kaufen zu 65 % auch einen Nasenspray, wenn sie mindestens eines der anderen Medikamente erwerben, ansonsten kaufen sie kein Nasenspray. Der Einkauf eines beliebigen herausgegriffenen Kunden wird als Zufallsexperiment aufgefasst. Die relativen Häufigkeiten werden dabei als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

3.1 Erstellen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und bestimmen Sie den Ergebnisraum sowie die Wahrscheinlichkeit aller Elementarereignisse in Prozent. Runden Sie nicht! (6 BE)

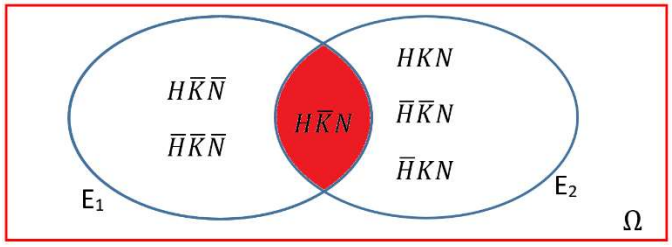


3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit (in %), mit welcher ein zufällig ausgewählter Kunde keine Kopfschmerztabletten kauft. Geben Sie das Ereignis (E_1) auch in aufzählender Mengenschreibweise an. (2 BE)

$E_1 = \{H\bar{K}N; H\bar{K}\bar{N};\ \bar{H}\bar{K}\bar{N}\}$

$P(E_1) = 15{,}6\,\% + 8{,}4\,\% + 51\,\% = 75\,\%$

3.3 Gegeben ist das Ereignis $E_2 = \{HKN;\ H\bar{K}N;\ \bar{H}KN;\ \bar{H}\bar{K}N\}$. Stellen Sie $E_1 \cap E_2$ mit Hilfe eines Venn-Diagramms dar. (1 BE)



3.4 Der Apothekenbesitzer beklagt, dass sich mindestens jeder zweite Kunde über die Produkte informiert, aber anschließend nichts in der Apotheke kauft, sondern im Internet bestellt. Nehmen Sie Stellung zu dieser Aussage. (1 BE)

$E_3 = \{\bar{H}\bar{K}\bar{N}\}$ $P(E_3) = 0{,}51.$

Der Apotheken Besitzer hat Recht, da 51 % aller Kunden keines der drei Produkte kaufen.
(Ob diese im Anschluss im Internet bestellt werden, kann man jedoch nicht sagen.)