Unterstreichen Sie Ergebnisse und runden Sie ggf. auf zwei Nachkommastellen. Antworten Sie auf Textaufgaben in einem Antwortsatz mit Bezug zum Sachzusammenhang. Begründen Sie alle Ihre Schritte genau z.B. durch Rechnungen oder klar verständliche Sätze. Achten Sie auf Rechtschreibung und eine saubere äußere Form.

Analysis (20BE)

1.1 Geben Sie ein Beispiel für eine differenzierbare Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$ an, deren erste Ableitung genau eine Nullstelle hat und deren Steigung in allen Monotonieintervallen das gleiche Vorzeichen hat. Geben Sie die Bedeutung dieser Stelle für den Graphen von f an. 2BE

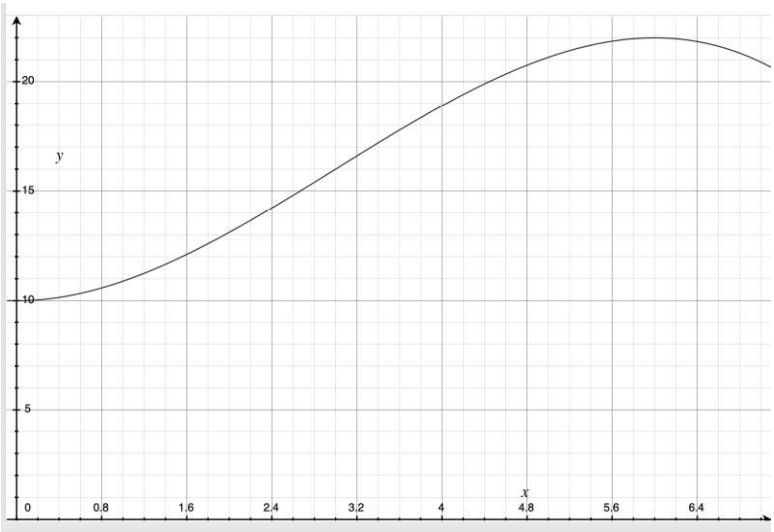
2.0 Gegeben sei die zweite Ableitung einer differenzierbaren Funktion g mit $D_g = \mathbb{R}$. Durch $g''(x) = -\frac{1}{3}(x-1)(x+3)$.

2.1 Ermitteln Sie die Anzahl der maximalen Krümmungsintervalle von g und begründen Sie Ihre Antwort. 2BE

2.2 Geben Sie den Grad des Polynoms g an. 1BE

2.3 Bestimmen Sie alle Wendestellen von g und begründen Sie Ihre Antwort. 2BE

3.0 Der Aktienkurs eines Start-Ups lässt sich in den ersten sieben Monaten nach dem Börsengang durch $K(t) = -\frac{1}{9}t^2(t-9)+10, D_K = [0;7]$ beschreiben. Dabei gibt t die Zeit in Monaten an, wobei $t=0$ der Zeitpunkt des Börsengangs war und K gibt den Aktienkurs in € an.



3.1 Berechnen Sie den Preis der Aktie beim Börsengang. 1 BE

3.2 Berechnen Sie die Zeitpunkte des maximalen und des minimalen Preises der Aktie im Beobachtungszeitraum und geben Sie die zugehörigen Preise an. 6BE

Zwischenergebnis: $t_1 = 0, t_2 = 6$

3.3 Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate des Aktienkurses in dem Zeitraum ab dem Börsengang bis zum Höchststand der Aktie und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. 3BE

3.4 Ermitteln Sie den Zeitpunkt des größten Preisanstieges (= größte Änderungsrate) der Aktie und begründen Sie Ihren Ansatz. 3BE

Stochastik (10BE)

4.1 Wie viele Möglichkeiten gibt es für sechs Personen ihre Jacken auf sechs Garderobenhaken zu hängen? 1BE

4.2 Ein Zahlenschloss für ein Fahrrad hat vier Ringe, die mit den Zahlen null bis sechs beschriftet sind. Wie viele mögliche Einstellungen der Zahlen gibt es? Mit welcher Wahrscheinlichkeit lässt sich das Schloss mit einer zufällig gewählten Zahlenfolge öffnen? 2BE

4.3 Bei einem Skilift hat jede Gondel sechs Plätze. Wie viele Möglichkeiten gibt es für vier Freunde in einer Gondel Platz zu nehmen? 2BE

4.4 Ein Drittel aller Fahrradkäufer kaufen sich ein E-Bike (E), wobei 60% der E-Bike Käufer eine Diebstahlversicherung (V) abschließen. 40% aller Fahrradkäufer versichern sich gegen Fahrraddiebstahl. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Vierfeldertafel den Anteil der Radfahrer, die kein E-Bike fahren von den Radfahrern, die eine Diebstahlversicherung abgeschlossen haben. 5BE

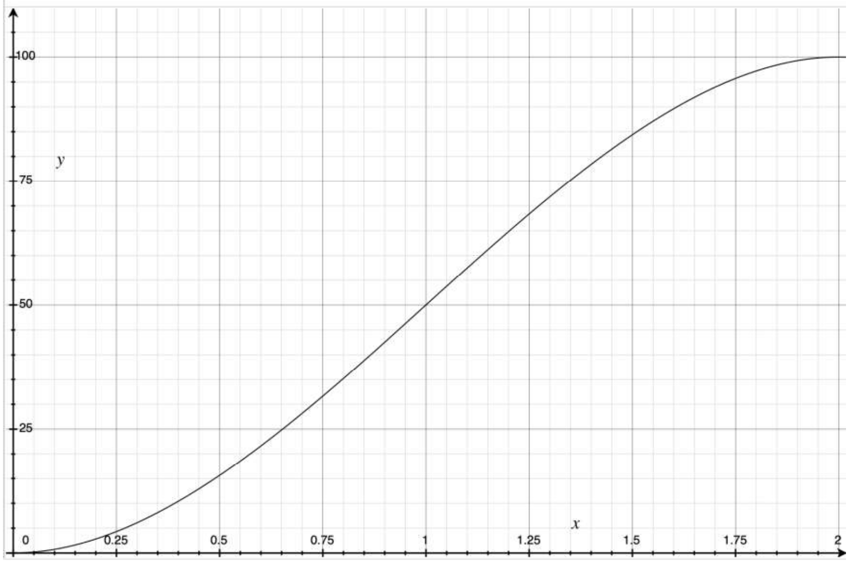
Therese-von-Bayern-Schule, München 21.06.2023
55 min, keine Hilfsmittel 2. Schulaufgabe aus der Mathematik F11B BE: 30

Unterstreichen Sie Ergebnisse und runden Sie ggf. auf zwei Nachkommastellen. Antworten Sie auf Textaufgaben in einem Antwortsatz mit Bezug zum Sachzusammenhang. Begründen Sie alle Ihre Schritte genau z.B. durch Rechnungen oder klar verständliche Sätze. Achten Sie auf Rechtschreibung und eine saubere äußere Form.

Analysis (20BE)

1.1 Geben Sie eine beliebige Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$ an, die genau eine Nullstelle der ersten Ableitung hat und deren zweite Ableitung an dieser Nullstelle ebenfalls Null ist. Welche Bedingung muss erfüllt sein, dass f an dieser Nullstelle ein relatives Maximum hat? 2BE
1.2 Wahr oder Falsch? “Ein Polynom dritten Grades hat höchstens einen Wendepunkt.” Begründen Sie Ihre Antwort. 2BE
1.3 Geben Sie die erste Ableitung einer beliebigen Funktion g an, die genau zwei Extremstellen besitzt. 2BE
1.4 In einem gegebenen Zeitraum hat der Kurs einer Aktie eine negative Änderungsrate. Leiten Sie aus dem Sachverhalt eine Aussage über Preisverlauf der Aktie in diesem Zeitraum ab. 2BE

2.0 Ein Autofahrer pendelt täglich in die Arbeit. Er benötigt 2 Stunden für die Strecke. Seine Fahrtstrecke s (in km) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) läßt sich beschreiben durch: $s(t) = -25t^2(t-3)$.



2.1 Geben Sie einen geeigneten Definitionsbereich für s an. 1BE
2.2 Berechnen Sie die Entfernung, die der Autofahrer auf dem Weg in die Arbeit zurücklegt. 1BE
2.3 Berechnen Sie alle Stellen der Wegstrecke, an denen seine momentane Geschwindigkeit (= momentane Änderungsrate) Null ist und interpretieren Sie den Sachverhalt. 3BE
2.4 Ermitteln Sie die Maximalgeschwindigkeit (= größte Änderungsrate) des Fahrers und begründen Sie Ihren Ansatz. 3BE
2.5 Geben das Krümmungsverhalten der Funktion an. Interpretieren Sie ihr Ergebnis im Sachzusammenhang. 4BE

Stochastik (10BE)

3.1 Wie viele Möglichkeiten gibt es, fünf verschieden farbige Bauklötze zu einem Turm (aus fünf Bauklötzen) übereinander zu stapeln? 1BE

3.2 Eine Schülerin sammelt Figuren aus Überraschungseiern und stellt sie in einen Setzkasten mit 25 Fächern. Sie hat bereits 20 Figuren gesammelt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese Figuren im Setzkasten zu verteilen? 2BE

3.3 Auf wie viele Arten lassen sich die Buchstaben in dem Wort “KORRIGIEREN” anordnen? 2BE

3.4 In einem Lokal für Kinder kann man Pizza- oder Nudelgerichte bestellen, sowie zum Trinken Limo oder Wasser. 40% derjenigen, die eine Pizza bestellen, trinken Limo. Vier von fünf Personen die ein Nudelgericht bestellen, trinken Wasser (W). 80% der verkauften Speisen sind Pizzen (P). Bestimmen Sie mit Hilfe einer Vierfeldertafel, wie viel Prozent aller Gäste Wasser bestellen? 5 BE

Analysis (20BE)

1.1 z.B. $f(x) = x^3$, An der Stelle liegt ein Terrassenpunkt 2BE

2.1 Es gibt zwei Nullstellen der zweiten Ableitung, also gibt es drei maximale Krümmungsintervalle. 2BE

2.2 Die Funktion der zweiten Ableitung ist zweiten Grades. Dann ist die Ausgangsfunktion ein Polynom vierten Grades. 1BE

2.3 $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$ sind Wendestellen, da bei jedem Linearfaktor ein Vorzeichenwechsel auftritt. 2BE

3.1 $K(0) = 10$. Der Preis der Aktie beim Börsengang betrug 10€. 1 BE

3.2 $K'(t) = -\frac{1}{3}t(\mathrm{t}-6), K'(t) = 0$; Die Nullstellen liegen bei $t_1 = 0, t_2 = 6$.

Die Überprüfung der hinreichenden Bedingung ergibt: $K''(t) = -\frac{2}{3}(t-3), K''(0) = 2 > 0$, lokales Minimum. $K''(6) = -2 < 0$, lokales Maximum. $K(0) = 10€, K(6) = 22€$.

Der Kurs der Aktie beim Börsengang ist mit 10€ minimal und zum Zeitpunkt 6 Monate mit 22€ maximal. 6BE

3.3 $\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{K(6)-K(0)}{6-0} = \frac{22-10}{6} = 2$

In dem genannten Zeitraum steigt der Aktienkurs im Mittel um $2\frac{€}{Monat}$. 3BE

3.4 Ansatz: Das Maximum des Preisanstiegs ist gesucht.

Notwendige Bedingung: $K''(x) = 0$. Hinreichende Bedingung: $K'''(x_w) < 0$; Bei $t = 3\ (s. 3.2)$ liegt die Nullstelle und wegen $K'''(3) = -\frac{2}{3} < 0$ ist es ein lokales Maximum. 2BE

Begründung: Die Wendestelle einer Funktion ist ein lokales Extremum der ersten Ableitung, also der Änderungsrate, $(K'(x))' = K''(x)$. Zum Zeitpunkt drei Monate ist die Änderung des Preisanstiegs maximal. 1BE

Stochastik (10BE)

4.1 $6! = 720$ 1BE

4.2 7^4 , $P(E) = \frac{1}{7^4}$ 2BE

4.3 $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6!}{2!} = 360$ 2BE

4.4 Ereignisse: E: E-Bike Käufer, V: Diebstahlversicherung 5BE

gegeben: $P(E) = \frac{1}{3}$; $P_E(V) = 60\% = \frac{3}{5}$; $P(V) = 40\% = \frac{2}{5}$

gesucht: $P_V(\underline{E})$

$$P_E(V) = \frac{P(V \cap E)}{P(E)}\ ;\ P(V \cap E) = P_E(V) \cdot P(E) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

$$P_V(\underline{E}) = \frac{P(V \cap \underline{E})}{P(V)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

Ω	$\boldsymbol{E}$	$\underline{\boldsymbol{E}}$	
V	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\underline{V}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{3}{5}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Ω	$\boldsymbol{E}$	$\underline{\boldsymbol{E}}$	
V	20%	20%	40%
$\underline{V}$	≈ 13,3%	≈ 46,7%	60%
	≈ 33,3%	≈ 66,7%	100%

Therese-von-Bayern-Schule, München 21.06.2023

2. Schulaufgabe aus der Mathematik F11B LÖSUNGSHINWEISE BE: 30

Analysis (20BE)

1.1 z.B. $f(x) = x^3$ oder $(x) = x^4$, Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von f bei $x = 0$ von $+$ nach $-$. 2BE

1.2 Wahr. Die zweite Ableitung einer Funktion dritten Grades ist eine Gerade und hat höchstens eine Nullstelle. 2BE

1.3 $f'(x) = a(x-b)(x-c);\ a; b; c \in \mathbb{R};\ a \neq 0;\ b \neq c$ 2BE

1.4 Der Preis der Aktie sinkt in diesem Zeitraum. 2BE

2.1 $D_s = [0; 2]$ 1BE

2.2 $s(2) = 100$; Der Autofahrer legt $100km$ zurück. 1BE

2.3 $s'(t) = -75t(t-2) = 0$; Nullstellen bei: $t_1 = 0;\ t_2 = 2$. Am Start und am Ende ist die Geschwindigkeit Null und das Auto steht. 3BE

2.4 Gesucht ist die Maximalstelle der ersten Ableitung, welches eine Nullstelle der zweiten Ableitung ist, an der die dritte Ableitung kleiner als Null sein muss. $s''(t) = -150(t-1)$; Nullstelle bei $t = 1$; $s'''(t) = -150 < 0$; lokales Maximum bei $t = 1$. 3BE

2.5 Im Intervall $K_1 = [0; 1]$, ist $s(t)$ links gekrümmt und im Intervall $K_2 = [1; 2]$ ist $s(t)$ rechts gekrümmt, was aus den Extremwerten der Aufgabe 2.4 folgt.

Innerhalb der ersten Stunde nimmt die Geschwindigkeit des Autos zu, danach - in der zweiten Stunde - nimmt die Geschwindigkeit ab. 4BE

Stochastik (10BE)

3.1 $5! = 120$ 1BE

3.2 $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 6 = \frac{25!}{(25-20)!} = \frac{25!}{5!}$ 2BE

3.3 $\frac{11!}{2!\,2!\,3!}$ 11 Buchstaben, davon I und E doppelt und R dreifach vorhanden 2BE

3.4 Ereignisse: W: Gast trinkt Wasser, P: Gast isst Pizza

gegeben: $P_P(\underline{W}) = 0{,}4 = \frac{2}{5}$; $P_{\underline{P}}(W) = 0{,}8 = \frac{4}{5}$; $P(P) = 0{,}8 = \frac{4}{5}$

gesucht: $P(W)$

$P_P(\underline{W}) = \frac{P(P \cap \underline{W})}{P(P)}$; $P(P \cap \underline{W}) = P_P(\underline{W}) \cdot P(P) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{25}$

$P_{\underline{P}}(W) = \frac{P(\underline{P} \cap W)}{P(\underline{P})}$; $P(\underline{P} \cap W) = P_{\underline{P}}(W) \cdot P(\underline{P}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$

Ω	P	$\underline{P}$	
W	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{16}{25}$
$\underline{W}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{9}{25}$
	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

Ω	P	$\underline{P}$	
W	48%	16%	64%
$\underline{W}$	32%	4%	36%
	80%	20%	100%

$P(W) = \frac{16}{25}$ 5BE