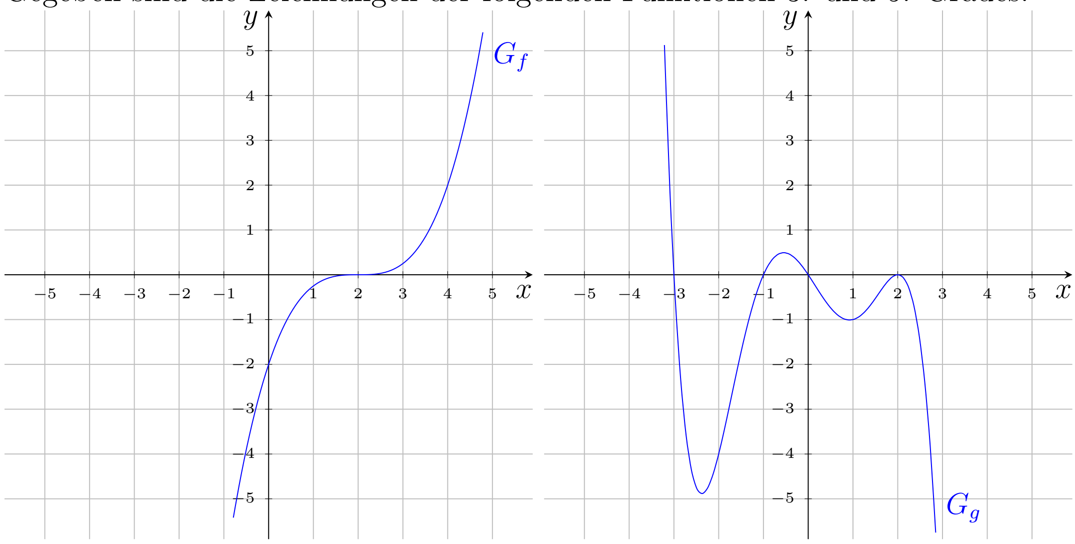
1. Schulaufgabe aus der Mathematik BOS 12 26.11.2019 Zeit: 75 Min.
(Hilfsmittel: Taschenrechner und Merkhilfe)

Analysis:

1. Gegeben sei $f(x) = -\frac{1}{3}x^5 + \frac{7}{3}x^3 - 4x$

   (a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f. Geben Sie deren Vielfachheiten an. (6 BE)

2. Gegeben sind die Zeichnungen der folgenden Funktionen 3. und 5. Grades.



   (a) Bestimmen Sie aus den Zeichnungen jeweils den Funktionsterm $f(x)$ und $g(x)$. (4 BE)

   (b) Wie oft schneiden sich G_f und G_g? (1 BE)

   (c) Wie oft können sich die Graphen einer beliebigen Funktion 3. Grades mit einer beliebigen Funktion 5. Grades maximal schneiden? Begründen Sie Ihre Antwort analytisch! (2 BE)

3. Prüfen Sie folgende Behauptungen. Begründen Sie ihre Antwort! (2 BE)

   (a) Eine Funktion 3. Grades hat immer einen Hoch- und einen Tiefpunkt.

   (b) Wenn die Funktionswerte einer Funktion positiv sind dann ist dort auch die Steigung positiv.

Bitte Wenden →

4. Von einem Fluss sei der Wasserstand im Jahreslauf bekannt und durch die Funktion W beschrieben. $W(t) = \frac{1}{10}t^3 - \frac{9}{5}t^2 + \frac{36}{5}t + 20$ mit $0 \leq t \leq 12$. t misst sich in Monaten, wobei $t = 0$ der Jahresbeginn ist. Der Wasserstand wird in Metern gemessen. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen wo nötig.

   (a) In welchem Monat ist der Wasserstand am höchsten? (6 BE)

   (b) In welchem Monat fällt der Wasserstand am schnellsten? (3 BE)

   (c) Zu welchem Zeitpunkt steigt der Wasserstand am schnellsten? (2 BE)

Stochastik:

5. In einer Studie wird der Zusammenhang zwischen Zucker in der Nahrung und der Krankheit Diabets untersucht. Dazu wurden 200 Jugendliche 20 Jahre lang begleitet. Die Jugendlichen wurden abhängig von ihrem Zuckerkonsum in zwei Gruppen eingeteilt. Von 200 Jugendlichen aßen 180 mehr als die allgemein empfohlene Zuckermenge (Z). Von diesen 180 Jugendlichen erkrankten 50% im laufe der folgenden 20 Jahre an Diabetes (D). In der Studie fand sich nur ein Jugendlicher, der trotz geringer Zuckeraufnahme an Diabetes erkrankte.

   (a) Stellen Sie den Sachverhalt in einer Vier-Felder-Tafel dar. (3 BE)

   (b) Wie groß war innerhalb der einzelnen Zuckergruppen die Wahrscheinlichkeit an Diabetes zu erkranken? (2 BE)

6. Zwei Freundinnen Eva und Maria spielen gemeinsam ein Tennisspiel. Ein Spiel besteht aus bis zu drei Sätzen. Wenn eine der beiden Spielerinnen 2 Sätze gewonnen hat endet das Spiel. Aus Erfahrung wissen die beiden, dass Eva normalerweise 60% der Sätze gewinnt. Jedes mal wenn Maria einen Satz gewinnt ist sie dadurch jedoch so motiviert, dass sie ausnahmsweise im direkt darauf folgenden Satz eine Chance von 50% hat erneut zu gewinnen.

   (a) Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm mit allen Wahrscheinlichkeiten dar. (4 BE)

   (b) Geben Sie das Ereignis E_S: "Eva gewinnt das Spiel." in aufzählender Mengenschreibweise an und berechnen Sie dessen Wahrscheinlichkeit? (2BE)

   (c) Prüfen Sie, ob die Ereignisse E_1:"Eva gewinnt den ersten Satz" und das Ereignis E_S:"Eva gewinnt das Spiel" stochastisch unabhängig sind. Erklären Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. (3 BE)

1. Schulaufgabe aus der Mathematik BOS 12 26.11.2019 Zeit: 75 Min.
(Hilfsmittel: Taschenrechner und Merkhilfe)

Analysis:

1. Gegeben sei $f(x) = -\frac{1}{3}x^5 + \frac{7}{3}x^3 - 4x$

   (a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f. Geben Sie deren Vielfachheiten an. (6 BE)

   i) $0 = -\frac{1}{3}x^5 + \frac{7}{3}x^3 - 4x \quad |\cdot 3$

   $0 = x(-x^4 + 7x^2 - 12) \quad x_1 = 0$ ✓

   $0 = -x^4 + 7x^2 - 12$

   Subst: $z = x^2$ $\downarrow$

   $0 = -z^2 + 7z - 12$ ✓

   $0 = (z-3)(z-4)$

   $z_1 = 3 \qquad z_2 = 4$ ✓✓

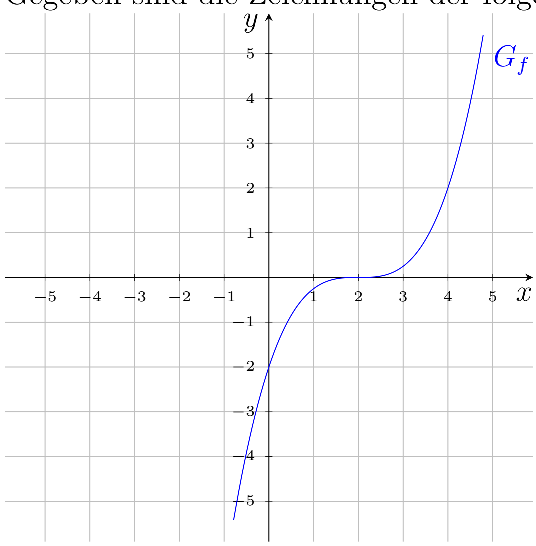
   Re: $x^2 = z$ $\downarrow \qquad \downarrow$

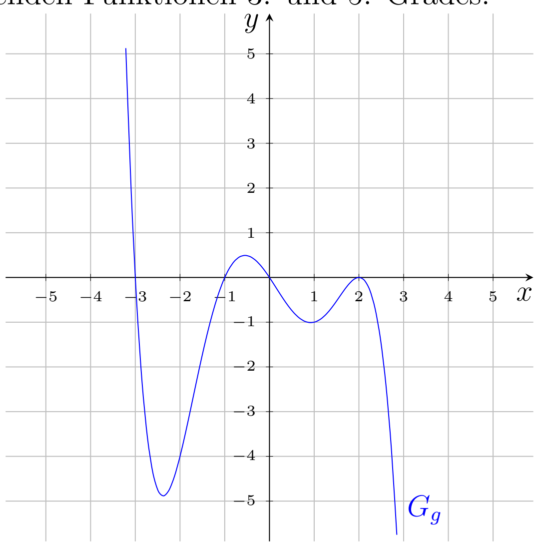
   $x^2 = 3 \qquad x^2 = 4$

   $x_{2,3} = \pm\sqrt{3} \qquad x_{4,5} = \pm 2$ ✓

   alle einfache Nullstellen ✓

2. Gegeben sind die Zeichnungen der folgenden Funktionen 3. und 5. Grades.





   (a) Bestimmen Sie aus den Zeichnungen jeweils den Funktionsterm $f(x)$ und $g(x)$. (4 BE)

   $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^3$✓✓ $g(x) = -\frac{1}{8}(x-2)^2(x)(x+1)(x+3)$✓✓

   (b) Wie oft schneiden sich G_f und G_g? (1 BE)

   Nur einmal,✓(bei etwa $P(0,5/-0,75)$)

   (c) Wie oft können sich die Graphen einer beliebigen Funktion 3. Grades mit einer beliebigen Funktion 5. Grades maximal schneiden? Begründen Sie Ihre Antwort analytisch! (2 BE)

   Bis zu fünf mal. Beim Schneiden entsteht eine Gleichung mit x^5 die maximal 5 Lösungen haben kann.✓✓

3. Prüfen Sie folgende Behauptungen. Begründen Sie ihre Antwort! (2 BE)

(a) Eine Funktion 3. Grades hat immer einen Hoch- und einen Tiefpunkt.
Nein, sie kann auch einen Terassenpunkt haben.✓

(b) Wenn die Funktionswerte einer Funktion positiv sind dann ist dort auch die Steigung positiv.
Nein, positive Werte können abnehmen was einer negativen Steigung entspricht.✓

Bitte Wenden →

4. Von einem Fluss sei der Wasserstand im Jahreslauf bekannt und durch die Funktion W beschrieben. $W(t) = \frac{1}{10}t^3 - \frac{9}{5}t^2 + \frac{36}{5}t + 20$ mit $0 \leq t \leq 12$. t misst sich in Monaten, wobei $t = 0$ der Jahresbeginn ist. Der Wasserstand wird in Metern gemessen. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen wo nötig.

(a) In welchem Monat ist der Wasserstand am höchsten? (6 BE)
$W'(t) = \frac{3}{10}x^2 - \frac{18}{5}x + \frac{36}{5}$ ✓
$0 = \frac{3}{10}x^2 - \frac{18}{5}x + \frac{36}{5} | \cdot 10 : 3$
$0 = x^2 - 12x + 24$
$x_1 \approx 2,5359,\ x_2 \approx 9,4641$✓✓
VZT von f'

x		$2,54$		$9,46$	✓✓
VZ v. f'	$+$	0	$-$	0	$+$
G_f	↗	→ *HOP* $(2,54/28,31)$	↘	→ *TIP* $(9,46/11,69)$	↗

Höchter Wasserstand ist Mitte März.✓

(b) In welchem Monat fällt der Wasserstand am schnellsten? (3 BE)
$W''(t) = \frac{3}{5}x - \frac{18}{5}$
$0 = 3x - 18 \Rightarrow x_1 = 6$.✓Fällt siehe Vorzeichentabelle ✓, Ende Juni bzw. Anfang Juli.✓

(c) Zu welchem Zeitpunkt steigt der Wasserstand am schnellsten? (2 BE)
Zu Silvester✓, weil $W'(0) = W'(12) = \frac{36}{5}$✓

Stochastik:

5. In einer Studie wird der Zusammenhang zwischen Zucker in der Nahrung und der Krankheit Diabets untersucht. Dazu wurden 200 Jugendliche 20 Jahre lang begleitet. Die Jugendlichen wurden abhängig von ihrem Zuckerkonsum in zwei Gruppen eingeteilt. Von 200 Jugendlichen aßen 180 mehr als die allgemein empfohlene Zuckermenge (Z). Von diesen 180 Jugendlichen erkrankten 50% im laufe der folgenden 20 Jahre an Diabetes (D). In der Studie fand sich nur ein Jugendlicher, der trotz geringer Zuckeraufnahme an Diabetes erkrankte.

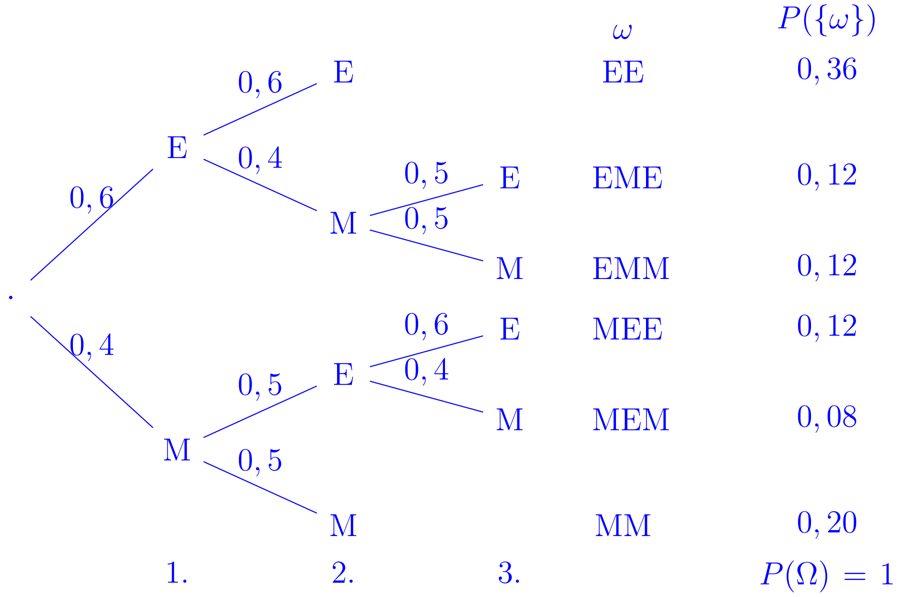
(a) Stellen Sie den Sachverhalt in einer Vier-Felder-Tafel dar. (3 BE)

	Z	$\overline{Z}$	
D	90✓	1✓	91
$\overline{Z}$	90	19	109
	180✓	20	200

(b) Wie groß war innerhalb der einzelnen Zuckergruppen die Wahrscheinlichkeit an Diabetes zu erkranken? (2 BE)
$P_Z(D) = 50\%$✓, $P_{\overline{Z}}(D) = \frac{1}{20} = 5\%$.✓

6. Zwei Freundinnen Eva und Maria spielen gemeinsam ein Tennisspiel. Ein Spiel besteht aus bis zu drei Sätzen. Wenn eine der beiden Spielerinnen 2 Sätze gewonnen hat endet das Spiel. Aus Erfahrung wissen die beiden, dass Eva normalerweise 60% der Sätze gewinnt. Jedes mal wenn Maria einen Satz gewinnt ist sie dadurch jedoch so motiviert, dass sie ausnahmsweise im direkt darauf folgenden Satz eine Chance von 50% hat erneut zu gewinnen.

(a) Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm mit allen Wahrscheinlichkeiten dar. (4 BE)



(b) Geben Sie das Ereignis E_S: "Eva gewinnt das Spiel." in aufzählender Mengenschreibweise an und berechnen Sie dessen Wahrscheinlichkeit? (2BE)
$E_S = \{\text{EE;EME;MEE}\}$, $P(E_S) = 0,36 + 0,12 + 0,12 = 60\%$

(c) Prüfen Sie, ob die Ereignisse E_1:"Eva gewinnt den ersten Satz" und das Ereignis E_S:"Eva gewinnt das Spiel" stochastisch unabhängig sind. Erklären Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. (3 BE)
$P(E_1) = 0,6,\ P(E_S) = 0,6,\ P(E_1 \cap E_S) = 0,36 + 0,12 = 0,48$✓
$P(E_1) \cdot P(E_S) \neq P(E_1 \cap E_S) \Rightarrow$ nicht stoch. unabh.✓
Wenn Eva das erste Spiel gewinnt, wird sie durch diesen Vorsprung viel häufiger auch insgesamt gewinnen.✓